Probe klausur 07/08

zu Aufgabe 1

1. Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & | & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & | & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 2 \end{pmatrix}$. Um diese Matrix in Treppennormalform zu überführen, subtrahieren wir das Doppelte der ersten Zeile von der zweiten und die erste Zeile von der dritten. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & | & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & | & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 2 \end{pmatrix}.$$

Wir addieren das Doppelte der vierten Zeile zur zweiten und die vierte Zeile zur dritten. Dies ergibt

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & | & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 2 \end{pmatrix}.$$

Wir vertauschen die zweite und die vierte Zeile und erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & | & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir subtrahieren die zweite Zeile von der ersten und die dritte Zeile von der zweiten. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Dies ist die Treppennormalform der erweiterten Koeffizientenmatrix.

2. In $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$ streichen wir die Nullzeile und fügen eine Nullzeile so ein, dass die Matrix links des Striches quadratisch ist und die Pivot-Positionen auf der Diagonalen stehen. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Rechts des Striches steht $\lambda_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, eine Lösung des linearen Gleichungssystems.

In $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ersetzen wir die Null auf der Diagonalen durch -1 und erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die gesuchte Lösungsmenge ist dann

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\{ a \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$$

zu Aufgabe 2

1. Seien $a + bT + cT^2$ und $a' + b'T + c'T^2$ in V. Dann gilt

$$\begin{aligned} f((a + bT + cT^2) + (a' + b'T + c'T^2)) &= f((a + a') + (b + b')T + (c + c')T^2) \\ &= (a + a' + c + c') + (b + b')T^2 \\ &= (a + c) + bT^2 + (a' + c') + b'T^2 \\ &= f(a + bT + cT^2) + f(a' + b'T + c'T^2). \end{aligned}$$

Sei $r \in \mathbb{R}$, und sei $a + bT + cT^2 \in V$.Dann gilt

$$\begin{aligned} f(r(a + bT + cT^2)) &= f(ra + rbT + rcT^2) \\ &= (ra + rc) + rbT^2 \\ &= r((a + c) + bT^2) \\ &= rf(a + bT + cT^2). \end{aligned}$$

Es folgt, dass f linear ist.

2. Als Basis $\mathcal{B}$ wählen wir die Standardbasis, also $\mathcal{B} = (1, T, T^2)$. Dann gilt

$$\begin{array}{lclcl} f(1) &=& 1 &=& 1 \cdot 1 + 0 \cdot T + 0 \cdot T^2, \\ f(T) &=& T^2 &=& 0 \cdot 1 + 0 \cdot T + 1 \cdot T^2, \\ f(T^2) &=& 1 &=& 1 \cdot 1 + 0 \cdot T + 0 \cdot T^2. \end{array}$$

Die Koeffizienten schreiben wir als Spalten in eine Matrix und erhalten

$$_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Es ist $\mathrm{Rg}(f) = \mathrm{Rg}(_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)) = 2$.

zu Aufgabe 3

1. Wir benutzen zum Beweis das Unterraumkriterium.

   Das Nullpolynom liegt in U, denn es ist von der Form $2a + 3b + bT + aT^2$, mit $a = b = 0$.

   Seien $2a+3b+bT+aT^2$ und $2a'+3b'+b'T+a'T^2$ in U. Dann gilt $(2a+3b+bT+aT^2)+(2a'+3b'+b'T+a'T^2) = 2(a+a')+3(b+b')+(b+b')T+(a+a')T^2 \in U$.

   Sei $2a + 3b + bT + aT^2 \in U$, und sei $r \in \mathbb{R}$. Dann gilt $r(2a + 3b + bT + aT^2) = 2ra + 3rb + rbT + raT^2 \in U$. Mit dem Unterraumkriterium folgt, dass U ein Unterraum von $\mathbb{R}[T]$ ist.

2. Die Polynome $2+T^2$ und $3+T$ liegen in U. Wir zeigen, dass $(2+T^2, 3+T)$ eine Basis von U ist.

   Erzeugendensystem: Sei $2a + 3b + bT + aT^2 \in U$. Dann gilt

   $$2a + 3b + bT + aT^2 = a(2 + T^2) + b(3 + T),$$

   und es folgt, dass $(2 + T^2, 3 + T)$ ein Erzeugendensystem von U ist.

Lineare Unabhängigkeit: Die beiden Polynome $2 + T^2$ und $3 + T$ sind keine Vielfachen voneinander. Es folgt, dass sie linear unabhängig sind.

Da die Polynome in U liegen, ein Erzeugendensystem von U bilden und linear unabhängig sind, bilden sie eine Basis von U.

WS 07/08

zu Aufgabe 1

Die erweiterte Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems ist

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix überführen wir in Treppennormalform und erhalten

$$T' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}.$$

Links des Strichs steht die Treppennormalform T der Koeffizientenmatrix A.

Wir führen Nullzeilen so ein, dass die Matrix links des Strichs quadratisch ist und die Pivot-Positionen auf der Diagonalen stehen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}$$

Rechts des Strichs steht eine spezielle Lösung des linearen Gleichungssystems. Wir fügen nun -1 überall auf der Diagonalen ein, wo 0 steht.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}.$$

An dieser Matrix können wir die Lösungsmenge ablesen: Eine spezielle Lösung steht rechts des Strichs, und die Lösungsmenge des homogenen Systems ist die Menge der Linearkombinationen der Spalten, in denen wir -1 eingeführt haben. Es folgt:

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \left\{ a \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

zu Aufgabe 2

1. Seien $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$ in V. Es gilt

$$\begin{aligned} f(A+B) &= \begin{pmatrix} 2a+2x & b+c+y+z \\ b+c+y+z & 2d+2u \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ b+c & 2d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x & y+z \\ y+z & 2u \end{pmatrix} = f(A) + f(B). \end{aligned}$$

   Seien $x \in \mathbb{R}$ und $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V$. Dann gilt

$$f(xA) = \begin{pmatrix} 2xa & xb+xc \\ xb+xc & 2xd \end{pmatrix} = xf(A).$$

   Es folgt, dass f linear ist.

2. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Bild}(f) &= \langle f(E_{11}), f(E_{12}), f(E_{21}), f(E_{22}) \rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

Die Matrizen $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig, bilden also eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$.

Mit dem Rangsatz gilt

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Kern}(f)) + \dim(\mathrm{Bild}(f)),$$

also $\dim(\mathrm{Kern}(f)) = 4 - 3 = 1$. Es reicht also, eine linear unabhängige Matrix in $\mathrm{Kern}(f)$ zu finden.

Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Dann gilt $f(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, also $A \in \mathrm{Kern}(f)$. Somit ist A eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$.

zu Aufgabe 3

Zum Beweis benutzen wir das Unterraumkriterium. Die Nullmatrix liegt in V. Seien $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix} \in V$. Dann gilt $A + B = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ b+b' & c+c' \end{pmatrix} \in V$. Sei $r \in \mathbb{R}$, und sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in V$. Dann gilt $(rA) = \begin{pmatrix} ra & rb \\ rb & rc \end{pmatrix}$, also $rA \in V$. Mit dem Unterraumkriterium folgt, dass V ein Unterraum von $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$ ist.

zu Aufgabe 1

Wir überführen die erweiterte Koeffizientenmatrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}$ in Treppennormalform. Dazu subtrahieren wir die zweite Zeile von der ersten und erhalten $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}$. Jetzt subtrahieren wir die dritte Zeile von der ersten und addieren sie zur zweiten. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist in Treppennormalform. Wir fügen Nullzeilen so ein, dass die Matrix links des Strichs quadratisch wird und die Pivot-Positionen auf der Diagonalen stehen.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}$$

Rechts des Strichs steht eine spezielle Lösung $\lambda_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Wir fügen -1 dort auf der Diagonalen ein, wo 0 steht und erhalten

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}.$$

Jetzt können wir $\mathcal{L}$ ablesen. Es ist

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \left\{ a \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

zu Aufgabe 2

Es sind

$$\begin{array}{rcrcrcr} f(v_1) & = & 0 \cdot v_1 & + & 1 \cdot v_2 & + & 1 \cdot v_3 \\ f(v_2) & = & 0 \cdot v_1 & + & 0 \cdot v_2 & + & 1 \cdot v_3 \\ f(v_3) & = & 1 \cdot v_1 & - & 1 \cdot v_2 & + & 0 \cdot v_3. \end{array}$$

Es folgt

$${}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist $\dim(\mathrm{Bild}(f)) = \mathrm{Rg}({}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f))$. Zur Rang-Bestimmung beginnen wir, die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ in Treppennormalform zu überführen. Wir vertauschen die erste und die dritte Zeile und erhalten $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Jetzt subtrahieren wir die erste Zeile von der zweiten und erhalten $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Jetzt können wir aber schon aufhören, denn es ist klar, dass diese Matrix den Rang 3 hat. Somit folgt $\dim(\mathrm{Bild}(f)) = 3$.

zu Aufgabe 3

1. Wir benutzen zum Beweis das Unterraumkriterium. Mit $a = b = 0$ liegt das Nullpolynom in U. Seien $a, a', b, b', s \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & (a + bT + aT^2 + (a+b)T^3) + (a' + b'T + a'T^2 + (a' + b')T^3) \\ = \quad & (a + a') + (b + b')T + (a + a')T^2 + (a + a' + b + b')T^3 \in U \end{aligned}$$

und

$$s(a + bT + aT^2 + (a+b)T^3) = sa + sbT + saT^2 + (sa + sb)T^3 \in U.$$

Mit dem Unterraumkriterium folgt, dass U ein Unterraum von V ist.

2. Mit $a = 1$ und $b = 0$ gilt $1 + T^2 + T^3 \in U$, und mit $a = 0$ und $b = 1$ gilt $T + T^3 \in U$. Diese Polynome sind linear unabhängig, denn sie sind keine Vielfachen voneinander. Wir zeigen nun, dass sie auch ein Erzeugendensystem von U bilden. Dazu sei $a + bT + aT^2 + (a+b)T^3 \in U$. Dann gilt $a + bT + aT^2 + (a+b)T^3 = a(1 + T^2 + T^3) + b(T + T^3)$, somit ist jedes Polynom in U eine Linearkombination der Polynome $1 + T^2 + T^3$ und $T + T^3$. Es folgt, dass $1 + T^2 + T^3, T + T^3$ eine Basis von U ist.

zu Aufgabe 4

1. Sei $m = \dim(\mathrm{Bild}(f)) = \dim(\mathrm{Kern}(f))$. Mit dem Rangsatz gilt

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Bild}(f)) + \dim(\mathrm{Kern}(f)) = 2m,$$

somit ist $\dim(V)$ gerade.

2. Sei $V = \mathbb{R}^2$, und sei e_1, e_2 die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung, die durch $f(e_1) = e_2$ und $f(e_2) = 0$ definiert wird. Dann ist $e_2, 0$ ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Bild}(f)$, das heißt, e_2 ist eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$. Mit dem Rangsatz ist $\dim(\mathrm{Kern}(f)) = 1$, und $e_2 \in \mathrm{Kern}(f)$. Es folgt $\mathrm{Kern}(f) = \{ae_2 \mid a \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Bild}(f)$.

WS 08/09

Aufgabe 2

Die erweiterte Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix überführen wir in Treppennormalform. Dafür teilen wir die zweite Zeile durch 2:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}$$

Jetzt subtrahieren wir die dritte Zeile von der ersten:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}$$

Im nächsten Schritt subtrahieren wir die dritte Zeile von der zweiten:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}$$

Die Matrix ist jetzt in Treppennormalform. Da die Ränge der Koeffizientenmatrix und der erweiterten Koeffizientenmatrix gleich sind, besitzt das lineare Gleichungssystem eine Lösung.

Wir fügen nun Nullzeilen so ein, dass die Matrix links des Strichs quadratisch ist und die Pivotpositionen auf der Diagonalen stehen.

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Rechts des Strichs steht eine spezielle Lösung λ_0 des linearen Gleichungssystems. Jetzt ersetzen wir die Nullen auf der Diagonalen durch -1:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ ist dann

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\{ a \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe 3

1. Seien $p = a_0 + a_1T + a_2T^2$ und $q = b_0 + b_1T + b_2T^2$ in V. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(p+q) &= f(a_0 + a_1T + a_2T^2 + b_0 + b_1T + b_2T^2) \\ &= f((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)T + (a_2 + b_2)T^2) \\ &= \begin{pmatrix} a_0 + b_0 + a_1 + b_1 & 2(a_2 + b_2) \\ -a_2 - b_2 & a_1 + b_1 - a_0 - b_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_0 + a_1 & 2a_2 \\ -a_2 & a_1 - a_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 + b_1 & 2b_2 \\ -b_2 & b_1 - b_0 \end{pmatrix} \\ &= f(a_0 + a_1T + a_2T^2) + f(b_0 + b_1T + b_2T^2) = f(p) + f(q). \end{aligned}$$

Seien $p = a_0 + a_1T + a_2T^2$ und $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(ap) &= f(aa_0 + aa_1T + aa_2T^2) = \begin{pmatrix} aa_0 + aa_1 & 2aa_2 \\ -aa_2 & aa_1 - aa_0 \end{pmatrix} \\ &= a \begin{pmatrix} a_0 + a_1 & 2a_2 \\ -a_2 & a_1 - a_0 \end{pmatrix} = af(p). \end{aligned}$$

Es folgt, dass f linear ist.

2. Es ist $(1, T, T^2)$ eine Basis von V. Es gilt $f(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $f(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $f(T^2) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Damit ist

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Bild}(f)$. Wir überprüfen, ob die Matrizen linear unabhängig sind. Dafür seien $a, b, c \in \mathbb{R}$, sodass gilt:

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 2c \\ -c & b-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es folgt $c = 0$ und $b - a = 0$, also $b = a$. Aus $a + b = 2a = 0$ folgt $a = 0$, und damit $b = 0$. Somit sind die Matrizen linear unabhängig und bilden daher eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$.

3. Wir wählen $\mathcal{B} = (1, T, T^2)$ und $\mathcal{C} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 \cdot E_{11} + 0 \cdot E_{12} + 0 \cdot E_{21} - 1 \cdot E_{22} \\ f(T) &= 1 \cdot E_{11} + 0 \cdot E_{12} + 0 \cdot E_{21} + 1 \cdot E_{22} \\ f(T^2) &= 0 \cdot E_{11} + 2 \cdot E_{12} - 1 \cdot E_{21} + 0 \cdot E_{22} \end{aligned}$$

Es folgt ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2

Durch die elementaren Zeilenumformungen: Addition der zweiten Zeile zur ersten und Subtraktion der zweiten Zeile von der vierten geht A über in die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Addition der ersten zur dritten Zeile und Subtraktion der vierten Zeile von der dadurch erhaltenen dritten ergibt die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nach Vertauschung der zweiten und vierten Zeile und danach Vertauschung der dritten und vierten Zeile erhält man die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Durch die Umformungen: Multiplikation der vierten Zeile mit $\frac{1}{2}$ und danach Subtraktion der vierten Zeile von der ersten Zeile erhält man die Einheitsmatrix I_4.

Die Treppennormalform von A ist also die Einheitsmatrix I_4 und damit gilt $\mathrm{Rg}(A) = 4$.

Aufgabe 3

1. Seien $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ in $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(A+A') &= f\begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix} \\ &= (a+a'+b+b') + (a+a'+b+b')T + (a+a'+b+b'+c+c'+d+d')T^2 \\ &= (a+b) + (a+b)T + (a+b+c+d)T^2 \\ &\quad +(a'+b') + (a'+b')T + (a'+b'+c'+d')T^2 \\ &= f(A) + f(A'). \end{aligned}$$

Sei $r \in \mathbb{R}$, und sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(rA) &= f\begin{pmatrix} ra & rb \\ rc & rd \end{pmatrix} \\ &= (ra+rb) + (ra+rb)T + (ra+rb+rc+rd)T^2 \\ &= r((a+b) + (a+b)T + (a+b+c+d)T^2) \\ &= rf(A). \end{aligned}$$

Somit ist f linear.

2. Sei $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ die Standardbasis von $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$. Wir bilden $f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 + T + T^2$, $f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 + T + T^2$, $f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = T^2$ und $f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T^2$.

Da $\left(f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Bild}(f)$ ist, und da $f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gelten, folgt, dass $(1+T+T^2, T^2)$ ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Bild}(f)$ ist. Die Polynome $1+T+T^2$ und T^2 sind keine Vielfachen voneinander, sie sind also linear unabhängig. Somit ist $(1+T+T^2, T^2)$ eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$.

Aufgabe 4

Zum Beweis benutzen wir das Unterraumkriterium.

Die Nullmatrix liegt in V, denn $0X_0 = 0$.

Seien $A, B \in V$. Dann gilt $(A+B)X_0 = AX_0 + BX_0 = 0 + 0 = 0$, also $A + B \in V$.

Sei $a \in \mathbb{R}$, und sei $A \in V$. Dann gilt $aAX_0 = a0 = 0$, also $aA \in V$.

Mit dem Unterraumkriterium folgt die Behauptung.

WS 09/10

Aufgabe 2

Wir schreiben A und die Einheitsmatrix I_3 durch einen Strich getrennt in eine Matrix und erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nun überführen wir diese Matrix in Treppennormalform. Dazu addieren wir die erste Zeile zur zweiten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jetzt tauschen wir die zweite und die dritte Zeile:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jetzt subtrahieren wir die zweite von der dritten Zeile:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Wir teilen die dritte Zeile durch 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Zum Schluss subtrahieren wir die dritte Zeile von der ersten:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Rechts des Striches steht die zu A inverse Matrix, also $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3

1. Seien $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$, und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right) &= f\begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b'+c+c' & d+d' \\ b+b' & a+a'+d+d' & a+a' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b+c & d \\ b & a+d & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b'+c' & d' \\ b' & a'+d' & a' \end{pmatrix} \\ &= f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   und

$$\begin{aligned} f\left(\lambda\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) &= f\begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b + \lambda c & \lambda d \\ \lambda b & \lambda a + \lambda d & \lambda a \end{pmatrix} \\ &= \lambda\begin{pmatrix} a & b+c & d \\ b & a+d & a \end{pmatrix} = \lambda f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

   Es folgt, dass f linear ist.

2. Wir setzen die Standardbasisvektoren von $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$ in f ein und erhalten

$$\begin{aligned} f\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} &= A_1\\ f\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} &= A_2\\ f\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} &= A_3\\ f\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} &= A_4. \end{aligned}$$

Diese Matrizen bilden ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Bild}(f)$. Wir zeigen, dass sie linea unabhängig sind. Dazu seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} a\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}a & b+c & d\\ b & a+d & a\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es folgt $a = d = b = 0$, also $c = 0$. Die Matrizen sind also linear unabhängig un bilden ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Bild}(f)$. Somit sind sie eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$.

3. Es ist $\dim(\mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})) = 4 = \dim(\mathrm{Bild}(f))$. Mit dem Rangsatz gilt

$$\dim(\mathrm{Kern}(f)) = \dim(\mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})) - \dim(\mathrm{Bild}(f)) = 0,$$

also $\mathrm{Kern}(f) = \{0\}$. Da f linear ist, folgt, dass f injektiv ist.

Natürlich kann man die Injektivität von f auch direkt nachrechnen.

Aufgabe 2

Es ist Kern(f) die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$. Um diese zu berechnen, überführen wir A in Treppennormalform. Dazu subtrahieren wir die erste Zeile von der zweiten, addieren die vierte Zeile zur dritten, und subtrahieren dann das Vierfache der ersten Zeile von der vierten. Das liefert

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 7 & -2 \\ 0 & -7 & 2 \\ 0 & 14 & -4 \end{pmatrix}.$$

Jetzt addieren wir die zweite Zeile zur dritten und subtrahieren das Doppelte der zweiten Zeile von der vierten. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir teilen die zweite Zeile durch 7 und addieren dann das Vierfache der zweiten Zeile zur ersten. Damit erhalten wir die Treppennormalform

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

Seien $\sum_{i=0}^{2} a_i T^i$ und $\sum_{i=0}^{2} b_i T^i$ in V. Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(\sum_{i=0}^{2} a_i T^i + \sum_{i=0}^{2} b_i T^i) &= f(\sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) T^i) \\ &= \begin{pmatrix} a_0 + b_0 & a_0 + b_0 + a_1 + b_1 \\ a_1 + b_1 + a_2 + b_2 & a_0 + b_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_0 & a_0 + a_1 \\ a_1 + a_2 & a_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 & b_0 + b_1 \\ b_1 + b_2 & b_0 \end{pmatrix} \\ &= f(\sum_{i=0}^{2} a_i T^i) + f(\sum_{i=0}^{2} b_i T^i) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f(a \sum_{i=0}^{2} a_i T^i) &= f(\sum_{i=0}^{2} a a_i T^i) = \begin{pmatrix} a a_0 & a a_0 + a a_1 \\ a a_1 + a a_2 & a a_0 \end{pmatrix} \\ &= a \begin{pmatrix} a_0 & a_0 + a_1 \\ a_1 + a_2 & a_0 \end{pmatrix} = a f(\sum_{i=0}^{2} a_i T^i). \end{aligned}$$

Es folgt, dass f linear ist.

Aufgabe 4

Wenn alle $a_i = 0$ sind, dann ist auch $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$. Nehmen wir nun an, dass nicht alle $a_i = 0$ sind und dass $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$ ist. Wir müssen zeigen, dass es keinen Index k, $1 \leq k \leq n$,

gibt, sodass $a_k = 0$ ist. Angenommen, es gibt einen Index k mit $a_k = 0$. Nach Annahme sind $v_1, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_n$ linear unabhängig. Da $0 = \sum\limits_{i=1}^{k-1} a_i v_i + \sum\limits_{i=k+1}^{n} a_i v_i$ ist, folgt, dass die Skalare $a_1, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_n$ Null sein müssen. Es folgt also $a_i = 0$ für alle $1 \leq i \leq 0$. Aber das hatten wir ausgeschlossen. Dieser Widerspruch zeigt, dass es keinen Index k, $1 \leq k \leq n$, mit $a_k = 0$ gibt, also alle Koeffizienten $\neq 0$ sind.

WS 10/11

Aufgabe 2

Wir schreiben A und die 3×3-Einheitsmatrix in eine Matrix und erhalten

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Jetzt überführen wir diese Matrix in Treppennormalform. Dazu subtrahieren wir das a-Fache der zweiten Zeile von der ersten und addieren das c-Fache der dritten Zeile zur zweiten. Wir erhalten

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & b-ac & 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Jetzt addieren wir das $(b-ac)$-Fache der dritten Zeile zur ersten und multiplizieren dass die dritte Zeile mit -1. Das ergibt

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -a & b-ac \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Rechts des Striches steht die zu A inverse Matrix $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & b-ac \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3

1. Wir verwenden zum Beweis das Unterraumkriterium. Die $n \times n$-Nullmatrix liegt in V_n, denn die Summe der Diagonaleinträge ist 0. Seien $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ in

V_n. Dann gilt $\mathrm{Spur}(A+B) = \sum\limits_{i=1}^n (a_{ii}+b_{ii}) = \sum\limits_{i=1}^n a_{ii} + \sum\limits_{i=1}^n b_{ii} = \mathrm{Spur}(A)+\mathrm{Spur}(B) = 0+0 = 0$, also gilt $A+B \in V_n$. Sei $a \in \mathbb{K}$ und $A = (a_{ij}) \in V_n$. Dann gilt $\mathrm{Spur}(aA) = \sum\limits_{i=1}^n aa_{ii} = a\sum\limits_{i=1}^n a_{ii} = a\mathrm{Spur}(A) = a \cdot 0 = 0$. Es folgt $aA \in V_n$. Mit dem Unterraumkriterium ist V_n ein Unterraum von $\mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$.

2. Seien $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Die Matrizen A, B und C liegen in V_2. Wir zeigen, dass (A,B,C) eine Basis von V_2 ist. Dazu seien $a,b,c \in \mathbb{K}$ mit

$$aA+bB+cC = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & a \\ b & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann folgt $a=b=c=0$, und somit sind A, B und C linear unabhängig.

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in V_2$. Dann gilt $\mathrm{Spur}(A) = a_{11}+a_{22} = 0$, also $a_{22} = -a_{11}$. Es folgt

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} \end{pmatrix} = a_{11}C + a_{12}A + a_{21}B.$$

Somit ist (A,B,C) auch ein Erzeugendensystem von V_2, und es folgt, dass (A,B,C) eine Basis von V_2 ist.

Aufgabe 4

1. Seien $v,w \in V$. Dann gilt $f_{a_0}(v+w) = a_0(v+w) = a_0v + a_0w = f_{a_0}(v) + f_{a_0}(w)$. Sei $v \in V$ und $a \in \mathbb{K}$. Dann gilt $f_{a_0}(av) = a_0av = aa_0v = af_{a_0}(v)$. Es folgt, dass f_{a_0} linear ist.

2. Ist $a_0 \neq 0$, so ist a_0 invertierbar, und es ist auch f_{a_0} invertierbar, denn $f_{a_0^{-1}}$ ist die zu f_{a_0} inverse Abbildung. Damit ist f_{a_0} ein Isomorphismus. Da ein Isomorphismus Basen auf Basen abbildet, gilt $\dim(\mathrm{Bild}(f_{a_0})) = \dim(V)$. Es folgt $\dim(\mathrm{Kern}(f_{a_0})) = 0$. Ist $a_0 = 0$, so ist f_{a_0} die Nullabbildung, also $V = \mathrm{Kern}(f_{a_0})$.
Dann ist $\dim(\mathrm{Kern}(f_{a_0})) = \dim(V)$ und $\dim(\mathrm{Bild}(f_{a_0})) = 0$.

SS 11

Aufgabe 2

1. Durch die elementaren Zeilenumformungen: Addition der zweiten Zeile zur ersten und Subtraktion der zweiten Zeile von der vierten (= Addition der (-1)-fachen der zweiten Zeile zur vierten) geht A über in die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Addition der ersten zur dritten Zeile und Subtraktion der vierten Zeile von der dritten ergibt die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Nach Vertauschung der zweiten und vierten Zeile und danach Vertauschung der dritten und vierten Zeile erhält man die Matrix

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+1 \end{pmatrix}.$$

In $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist $1 + 1 = 2 \neq 0$. Durch die Umformungen: Multiplikation der vierten Zeile mit $\frac{1}{2}$ und danach Subtraktion der vierten Zeile von der ersten Zeile erhält man die Einheitsmatrix I_4.

Die Treppennormalform von A ist also die Einheitsmatrix I_4 und damit gilt $\mathrm{Rg}(A) = 4$.

2. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$ kann man die oben angegebenen Umformungen analog durchführen, bis man zur Matrix A' gelangt. Da $1+1 = 0$ in $\mathbb{F}_2$ ist, ist man dann an dieser Stelle fertig. Die Treppennormalform von A lautet dann

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

und folglich ist $\mathrm{Rg}(A) = 3$.

Aufgabe 3

Sei $U = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1+x_2+x_3+x_4 = 0\}$. Dann ist U als Lösungsmenge des honogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$ mit $A = (1111)$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^4$. Die Matrix A ist bereits in Treppennormalform und hat den Rang 1. Deshalb gilt $\dim(U) = 4 - 1 = 3$. Für die Vektoren der Standardbasis gilt jeweils $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$, daher liegen sie nicht in U.

Aufgabe 4

Sei $x \in \mathrm{Kern}(f) \cap \mathrm{Kern}(g)$. Dann ist $f(x) = 0 = g(x)$. Es folgt $0 = f(x)+g(x) = (f+g)(x)$, also $x \in \mathrm{Kern}(f+g)$. Es folgt $\mathrm{Kern}(f) \cap \mathrm{Kern}(g) \subseteq \mathrm{Kern}(f+g)$, die Behauptung.

Aufgabe 2

Die erweiterte Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems ist

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right).$$

Wir subtrahieren die erste Zeile von der dritten

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

und die zweite von der vierten

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right).$$

Wir addieren die dritte Zeile zur vierten

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Nun addieren wir das Doppelte der dritten Zeile zur ersten und zur zweiten Zeile, multiplizieren die dritte Zeile mit -1 und erhalten die Treppennormalform

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wir fügen Nullzeilen und -1'en ein und erhalten

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Von dieser Matrix lesen wir die Lösungsmenge ab:

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe 3

Um zu zeigen, dass U ein Unterraum von $C[a,b]$ ist, benutzen wir das Unterraumkriterium. Für $\hat{0}$, das Nullelement von $C[a,b]$, gilt $\int\limits_a^b \hat{0} dx = 0$, also gilt $\hat{0} \in U$. Seien weiter $f, g \in U$, also $\int\limits_a^b f(x)dx = 0 = \int\limits_a^b g(x)dx$. Dann ist $\int\limits_a^b (f+g)(x)dx = \int\limits_a^b (f(x)+g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx = 0 + 0 = 0$. Also folgt $f + g \in U$. Sei nun $f \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist $\int\limits_a^b (\lambda f)(x)dx = \lambda \int\limits_a^b f(x)dx = \lambda \cdot 0 = 0$, also $\lambda f \in U$. Mit dem Unterraumkriterium folgt, dass U ein Unterraum von $C[a,b]$ ist.

Aufgabe 4

Da v_1, v_2, v_3 linear abhängig sind, gibt es $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ mit

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0, \text{ also } -\gamma v_3 = \alpha v_1 + \beta v_2,$$

und nicht alle drei Körperelemente α, β, γ sind 0. Angenommen, es gilt $\gamma = 0$. Dann wäre $\alpha v_1 + \beta v_2 = 0$, und mindestens eins der Körperelemente α, β ist ungleich 0. Dies ist aber ein Widerspruch dazu, dass v_1 und v_2 linear unabhängig sind. Es gilt also $\gamma \neq 0$, und die Gleichung $-\gamma v_3 = \alpha v_1 + \beta v_2$ kann durch $-\gamma$ geteilt werden. Es folgt $v_3 = -\frac{\alpha}{\gamma} v_1 + (-\frac{\beta}{\gamma}) v_2$, und mit $a = -\frac{\alpha}{\gamma}$ und $b = -\frac{\beta}{\gamma}$ folgt die Behauptung.

Aufgabe 5

1. Sei $p = a_0 + a_1 T + a_2 T^2 \in V$ mit $f(p) = (a_0, -a_1, a_2, a_0 + a_1 + a_2) = (0, 0, 0, 0)$. Ein Vergleich der ersten drei Komponenten liefert sofort, dass $a_0 = a_1 = a_2 = 0$, also $p = 0$, gilt. Damit ist $\text{Kern}(f) = \{0\}$ mit Basis $\emptyset$.

   Da $\text{Kern}(f) = \{0\}$ gilt, ist f injektiv. Also werden linear unabhängige Vektoren aus V auf linear unabhängige Vektoren in $M_{14}(\mathbb{R})$ abgebildet. Die Bilder der kanonischen Basis $(1, T, T^2)$ sind dann also linear unabhängig. Da sie außerdem ein Erzeugendensystem von $\text{Bild}(f)$ bilden, sind sie eine Basis von $\text{Bild}(f)$. Also ist

   $$f(1) = (1, 0, 0, 1), f(T) = (0, -1, 0, 1), f(T^2) = (0, 0, 1, 1)$$

   eine Basis von $\text{Bild}(f)$.

2. Wir berechnen

   $$\begin{aligned} f(1) &= (1,0,0,1) = 1 \cdot (1,0,0,0) + 0 \cdot (0,1,0,0) + 0 \cdot (0,0,1,0) + 1 \cdot (0,0,0,1) \\ f(T) &= (0,-1,0,1) = 0 \cdot (1,0,0,0) + (-1) \cdot (0,1,0,0) + 0 \cdot (0,0,1,0) + 1 \cdot (0,0,0,1) \\ f(T^2) &= (0,0,1,1) = 0 \cdot (1,0,0,0) + 0 \cdot (0,1,0,0) + 1 \cdot (0,0,1,0) + 1 \cdot (0,0,0,1). \end{aligned}$$

   Also gilt

   $$_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 1

Wir betrachten die erweiterte Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & | & 0 \\ 4 & 2 & 2 & | & 0 \\ 3 & 1 & 0 & | & 1 \\ -2 & 0 & 2 & | & t \end{pmatrix}.$$

Wir subtrahieren das Doppelte der ersten Zeile von der zweiten und addieren dann die vierte Zeile zur ersten und dritten Zeile:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & | & t \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & 1 & 2 & | & t+1 \\ -2 & 0 & 2 & | & t \end{pmatrix}.$$

Nun machen wir die dritte Zeile zur ersten, die erste zur zweiten, die vierte zur dritten und die zweite zur vierten Zeile:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & t+1 \\ 0 & 1 & 3 & | & t \\ -2 & 0 & 2 & | & t \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Jetzt addieren wir das Doppelte der ersten Zeile zur dritte Zeile und subtrahieren dann die zweite Zeile von der ersten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 3 & | & t \\ 0 & 2 & 6 & | & 3t+2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir subtrahieren das Doppelte der zweiten Zeile von der dritten Zeile

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 3 & | & t \\ 0 & 0 & 0 & | & t+2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Koeffizientenmatrix hat den Rang 2, die erweiterte den Rang 2, wenn $t+2=0$ gilt, und den Rang 3, wenn $t+2 \neq 0$ gilt. Das Gleichungssystem hat also genau dann mindestens eine Lösung, wenn $t+2=0$, also $t=-2$ gilt.

Aufgabe 2

(a) Seien $A, B \in M_{22}(\mathbb{R})$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \varphi(A+B) &= (A+B)X - X(A+B) = AX + BX - XA - XB \\ &= AX - XA + BX - XB = \varphi(A) + \varphi(B). \end{aligned}$$

Sei nun $A \in M_{22}(\mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\varphi(\lambda A) = (\lambda A)X - X(\lambda A) = \lambda AX - \lambda XA = \lambda(AX - XA) = \lambda\varphi(A).$$

Also ist φ linear.

(b) Es ist

$$\begin{aligned}
\varphi\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\\
&= 0\cdot E_{11} + 1\cdot E_{12} + 0\cdot E_{21} + 0\cdot E_{22}.\\
\varphi\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\\
&= 0\cdot E_{11} + 0\cdot E_{12} + 0\cdot E_{21} + 0\cdot E_{22}.\\
\varphi\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\\
&= (-1)\cdot E_{11} + 0\cdot E_{12} + 0\cdot E_{21} + 1\cdot E_{22}.\\
\varphi\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix}\\
&= 0\cdot E_{11} + (-1)E_{12} + 0\cdot E_{21} + 0\cdot E_{22}.
\end{aligned}$$

Damit gilt

$${}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix}0&0&-1&0\\1&0&0&-1\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

Mit dem Rangsatz (angewendet auf φ) gilt

$$\dim(\mathrm{Kern}(\varphi)) + \dim(\mathrm{Bild}(\varphi)) = \dim(U).$$

Da φ nach Voraussetzung injektiv ist, gilt $\dim(\mathrm{Kern}(\varphi)) = 0$, also $\dim(\mathrm{Bild}(\varphi)) = \dim(U)$. Weiter ist nach Voraussetzung $\mathrm{Bild}(\varphi) = \mathrm{Kern}(\psi)$, also folgt $\dim(\mathrm{Kern}(\psi)) = \dim(U)$. Mit dem Rangsatz (angewendet auf ψ) folgt nun

$$\dim(\mathrm{Kern}(\psi)) + \dim(\mathrm{Bild}(\psi)) = \dim(U) + \dim(\mathrm{Bild}(\psi)) = \dim(V).$$

Da ψ nach Voraussetzung surjektiv ist, ist $\dim(\mathrm{Bild}(\psi)) = \dim(W)$ und somit

$$\dim(U) + \dim(W) = \dim(V).$$

Aufgabe 2

Die erweiterte Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems ist

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & -1 & 2 \end{array}\right) .$$

Wir subtrahieren von der zweiten Zeile das zweifache und von der dritten das dreifache der ersten

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & -1 \end{array}\right) ,$$

dann von der dritten die zweite

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

und müssen nur noch das doppelte der dritten zur ersten addieren und das vierfache der dritten von der zweiten subtrahieren, um die Treppennormalform zu erhalten:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) .$$

Zum Auffüllen auf Dreiecksform fügen wir eine Nullzeile und -1 ein

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & | & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

und lesen daraus die Lösungsmenge ab:

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} .$$

Wir können auch die TNF „von unten" auflösen und erhalten

$$x_4 = 1 \ , \quad x_3 \text{ beliebig} \ , \quad x_2 = -6 - 2x_3 \ , \quad x_1 = 3 - x_3$$

(mit dem gleichen Ergebnis).

Aufgabe 3

Es ist

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Kern}(f) \quad &\Leftrightarrow \quad f(A) = \begin{pmatrix} 0 & a+b \\ a-b & a+2b \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad a+b = a-b = a+2b = 0 \Leftrightarrow a = b = 0 \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \ , \end{aligned}$$

also $\mathrm{Kern}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{22}(\mathbb{R}) \mid c, d \in \mathbb{R} \right\} = \{ c \cdot E_{21} + d \cdot E_{22} \mid c, d \in \mathbb{R} \}$. Die Einheitsmatrizen E_{21} und E_{22} bilden also ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Kern}(f)$, und da sie linear unabhängig sind, bilden sie auch eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$. Diese Basis kann durch E_{11} und E_{12} zur (kanonischen) Basis von $M_{22}(\mathbb{R})$ ergänzt werden, und $f(E_{11})$ und $f(E_{12})$, also $f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ bilden dann eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$.

Aufgabe 2

Wir suchen alle $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ mit $Ax = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, also die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die erweiterte Koeffizientenmatrix A' ist

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & | & 5 \\ 2 & 2 & -3 & 1 & | & 3 \\ 3 & 3 & -4 & -2 & | & 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix überführen wir in Treppennormalform. Dazu subtrahieren wir das Doppelte der ersten Zeile von der zweiten und das Dreifache der ersten Zeile von der dritten. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & | & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & | & -7 \\ 0 & 0 & 2 & -14 & | & -14 \end{pmatrix}.$$

Wir subtrahieren das Doppelte der zweiten Zeile von der dritten und addieren das Doppelte der zweiten Zeile zur ersten. Das ergibt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -10 & | & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & | & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist in Treppennormalform. Es ist $\mathrm{Rg} = \mathrm{Rg}(A')$, also existieren Lösungen. Wir verfahren jetzt wie im Kurstext beschrieben. Wir streichen alle Nullzeilen und fügen Nullzeilen so ein, dass die Matrix links vom Strich quadratisch ist und die 1'en auf der Diagonalen stehen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -10 & | & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & | & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Rechts des Striches steht eine spezielle Lösung $\lambda_0 = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}$. Links des Striches fügen wir -1 dort auf der Diagonalen ein, wo 0 steht:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -10 & | & -9 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & | & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist die gesuchte Lösungsmenge $\mathfrak{L} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Aufgabe 3

Für $t \neq 0$ liegt der Nullvektor nicht in U_t. Mit dem Unterraumkriterium folgt, dass U_t kein Unterraum von $\mathbb{R}^3$ ist. Ist $t = 0$, so ist U_t die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$. In diesem Fall ist U_t ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 4

Sei $f \neq \mathrm{id}_V$. Dann gibt es ein $x \in V$ mit $f(x) \neq x$, also $f(x) - x \neq 0$. Wir wenden nun f auf das Element $f(x) - x$ an und erhalten $f(f(x) - x) = f(f(x)) - f(x)$, denn f ist linear. Ferner ist $f(f(x)) = (f \circ f)(x)$, und wegen $f \circ f = f$ folgt $f(f(x)) = f(x)$. Somit gilt $f(f(x) - x) = f(f(x)) - f(x) = 0$. Es folgt, dass $f(x) - x \in \mathrm{Kern}(f)$ gilt, und da $f(x) - x \neq 0$ ist, ist $\mathrm{Kern}(f) \neq \{0\}$. Es folgt, dass f nicht injektiv ist.

Aufgabe 5

1. Es ist (v_{12}, v_{13}, v_{23}) ein Erzeugendensystem von $\langle v_{12}, v_{13}, v_{23}\rangle$. Weiter ist
$$v_{23} = v_{13} - v_{12} = v_1 - v_3 - v_1 + v_2.$$
Somit ist v_{23} linear abhängig von v_{12} und v_{13} und es folgt $\langle v_{12}, v_{13}, v_{23}\rangle = \langle v_{12}, v_{13}\rangle$. Wir zeigen jetzt, dass v_{12} und v_{13} linear unabhängig sind. Dazu seien $a, b \in \mathbb{K}$ mit
$$av_{12}+bv_{13} = a(v_1-v_2)+b(v_1-v_3) = av_1-av_2+bv_1-bv_3 = (a+b)v_1-av_2-bv_3 = 0.$$
Da v_1, v_2 und v_3 linear unabhängig sind, folgt $a = b = a + b = 0$. Dies zeigt, dass v_{12} und v_{13} linear unabhängig sind. Somit ist (v_{12}, v_{13}) eine Basis von $\langle v_{12}, v_{13}, v_{23}\rangle$.

2. Als Linearkombinationen von v_1, v_2 und v_3 sind v_{12} und v_{12} Elemente in V. Wir zeigen, dass (v_1, v_{12}, v_{13}) eine Basis von V ist. Dazu seien $a, b, c \in \mathbb{K}$ mit
$$av_1 + bv_{12} + cv_{13} = av_1 + bv_1 - bv_2 + cv_1 - cv_3 = (a + b + c)v_1 - bv_2 - cv_3 = 0.$$
Da (v_1, v_2, v_3) ein System linear unabhängiger Vektoren ist, folgt $b = c = a+b+c = 0$, also auch $a = 0$. Somit ist (v_1, v_{12}, v_{13}) ein System linear unabhängiger Vektoren in V. Nun ist aber $\dim(V) = 3$, und da drei linear unabhängige Vektoren in einem Vektorraum der Dimension 3 bereits eine Basis von V bilden, folgt, dass (v_1, v_{12}, v_{13}) eine Basis von V ist.

Aufgabe 2

Die erweiterte Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems ist

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 5 & 1 \\ 4 & -3 & 1 & 6 & 3 \end{array}\right) .$$

Wir subtrahieren von der zweiten Zeile das dreifache und von der dritten das vierfache der ersten

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) ,$$

dann vertauschen wir die zweite mit der dritten Zeile und ziehen anschließend von der neuen zweiten die dritte ab

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

und müssen nur noch das doppelte der zweiten zur ersten addieren und das vierfache der zweiten von der dritten subtrahieren, um die Treppennormalform zu erhalten:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -6 \end{array}\right) .$$

Zum Auffüllen auf Dreiecksform fügen wir eine Nullzeile und -1 ein

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

und lesen daraus die Lösungsmenge ab:

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} .$$

Wir können auch die TNF „von unten“ auflösen und erhalten

$$x_4 \text{ beliebig} , \quad x_3 = -6 - 2x_4 \quad , \quad x_2 = 1 , \quad x_1 = 3 - x_4$$

(mit dem gleichen Ergebnis).

Aufgabe 3

Einfacher als das sich aufdrängende $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ ist z.B. die Wahl $x_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$; aus $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ folgt dann

$$\begin{pmatrix}a\\a\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\b\\b\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\a+b\\b+c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

also $a = 0$ und dann der Reihe nach auch $b = 0$ und $c = 0$. x_1, x_2 und x_3 sind somit linear unabhängig und bilden (als drei linear unabhängige Vektoren im dreidimensionalen $\mathbb{R}^3$) eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 4

a) In $V = \mathbb{R}^2$ können wir z.B. $f : V \to V$, $f\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\a\end{pmatrix}$ definieren; dass die Matrizenmultiplikation eine lineare Abbildung ist, haben wir im Kurs gezeigt, und es ist

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \in \mathrm{Kern}(f) \Leftrightarrow f\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow a = 0,\ b \text{ beliebig}$$

und

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \in \mathrm{Bild}(f) \Leftrightarrow \text{es gibt } x, y \text{ mit } f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \Leftrightarrow a = 0,\ b \text{ beliebig};$$

also ist tatsächlich Kern(f)=Bild(f).

b) Für $V = \mathbb{R}^3$ kann es kein entsprechendes f geben: Wenn Kern(f)=Bild(f) sein soll, muss auch dim(Kern(f))=dim(Bild(f)) gelten; wenn wir das in den Rangsatz einsetzen, erhalten wir dim(V)=dim(Kern(f))+dim(Bild(f))=2 dim(Kern(f)). Für dim(V)=3 ist das nicht zu erfüllen.

SS 15

Aufgabe 2

Der Kern von f besteht aus allen Vektoren $x \in \mathbb{R}^5$ mit $Ax = 0$, ist also die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$. Dies bestimmen mit Hilfe des Gaußalgorithmus. Dazu überführen wir A in Treppennormalform.

Es ist $A = \begin{pmatrix}-2&2&-2&0&2\\-2&2&2&-2&4\\2&-2&0&1&-3\\-6&6&-4&-1&7\\0&0&2&-1&1\end{pmatrix}$.

Wir subtrahieren die erste Zeile von der zweiten, addieren die erste Zeile zur dritten und subtrahieren das 3-Fache der ersten Zeile von der vierten. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix}-2&2&-2&0&2\\0&0&4&-2&2\\0&0&-2&1&-1\\0&0&2&-1&1\\0&0&2&-1&1\end{pmatrix}.$$

Die letzten vier Zeilen sind Vielfache voneinander, wir können also die letzten drei Zeilen

durch Nullzeilen ersetzen. Wir teilen die zweite Zeile noch durch 2 und erhalten

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jetzt addieren wir die zweite Zeile zur ersten und teilen dann die erste Zeile durch -2 und die zweite durch 2. Das Ergebnis ist die Treppennormalform T zu A, also

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir streichen die Nullzeilen und fügen neue Nullzeilen so ein, dass die Pivot-Einsen in T auf der Diagonalen stehen:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir fügen -1 dort auf der Diagonalen ein, wo 0 steht:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Spalten, in denen wir -1 eingefügt haben, bilden ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Kern}(f)$. Die Spalten sind auch linear unabhängig, bilden daher eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$. Es ist also $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$.

Zur Berechnung einer Basis von $\mathrm{Bild}(f)$ verwenden wir zunächst den Rangsatz. Es ist $\dim(\mathbb{R}^5) = \dim(\mathrm{Kern}(f)) + \dim(\mathrm{Bild}(f))$, also $5 = 3 + \dim(\mathrm{Bild}(f))$. Es folgt $\dim(\mathrm{Bild}(f)) = 2$. Es reicht also, zwei linear unabhängige Vektoren in $\mathrm{Bild}(f)$ zu finden. Wenn wir die A mit den Vektoren der Standardbasis $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ von $\mathbb{R}^5$ multiplizieren, erhalten wir mit Ae_i gerade die i-te Spalte von A, also $Ae_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Ae_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Ae_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$,

$Ae_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $Ae_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die Vektoren Ae_1 und Ae_3 sind linear unabhängig, denn sie sind keine Vielfachen voneinander, und sie liegen in $\mathrm{Bild}(f)$. Sie bilden daher eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$.

Aufgabe 3

Seien U, V, W und u, w wie in der Aufgabenstellung, und sei $U \cap W = \{0\}$. Seien $a, b \in \mathbb{K}$ mit $au + bw = 0$. Ist $a \neq 0$, so folgt $u = \frac{b}{a}w$, und damit $u \in W$. Dann gilt $u \in U \cap W$, und $u \neq 0$. Das ist ein Widerspruch zu der Annahme, dass $U \cap W = \{0\}$ ist, und es folgt daher $a = 0$. Da $0u = 0$ ist, folgt $bw = 0$. Da $w \neq 0$ ist, kann diese Gleichung nur für $b = 0$ erfüllt sein. Wir haben also gezeigt, dass $a = b = 0$ ist, und dies bedeutet, dass u und w linear unabhängig sind.

WS 15/16

Aufgabe 2

Die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$ des linearen Gleichungssystems ist

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & -1 & | & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 2 & 2 & 4 & m & | & 1 \end{pmatrix} .$$

Wir vertauschen die ersten beiden Zeilen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 3 & 2 & 4 & -1 & | & 3 \\ 2 & 2 & 4 & m & | & 1 \end{pmatrix} ,$$

subtrahieren von der zweiten das dreifache der ersten und von der dritten das doppelte der ersten

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & | & -1 \end{pmatrix} ,$$

multiplizieren die zweite mit -1 und subtrahieren sie dann von der ersten

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & | & -1 \end{pmatrix} \qquad (*) .$$

Nun müssen wir unterscheiden:

1. Im Fall $m = 0$ haben wir (nachdem wir die letzte Zeile noch mit -1 multipliziert und von der ersten subtrahiert haben) die TNF

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} ,$$

also ist Rg(A)=2, aber Rg($A|b$)=3, und das Gleichungssystem hat keine Lösung.

2. In allen anderen Fällen ($m \neq 0$) können wir in $(*)$ die letzte Zeile durch a dividieren

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{m} \end{pmatrix}$$

und erhalten (indem wir die dritte Zeile zur ersten addieren und von der zweiten subtrahieren) die TNF

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1-\frac{1}{m} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & | & \frac{1}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{m} \end{pmatrix} .$$

Zum Auffüllen auf Dreiecksform fügen wir eine Nullzeile und -1 ein

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1-\frac{1}{m} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & | & \frac{1}{m} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{m} \end{pmatrix}$$

und lesen daraus die Lösungsmenge ab:

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{m} \\ \frac{1}{m} \\ 0 \\ -\frac{1}{m} \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\} .$$

Wir können auch die TNF „von unten" auflösen und erhalten

$$x_4 = -\frac{1}{m} , \quad x_3 \text{ beliebig} , \quad x_2 = \frac{1}{m} - 2x_3 , \quad x_1 = 1 - \frac{1}{m}$$

(mit dem gleichen Ergebnis).

Aufgabe 3

Es ist

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Kern}(f) \quad \Leftrightarrow \quad f(A) = \begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow \ a = d = 0 \ \Leftrightarrow \ A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} ,$$

also $\mathrm{Kern}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \in M_{22}(\mathbb{R}) \mid b, c \in \mathbb{R} \right\} = \{ b \cdot E_{12} + c \cdot E_{21} \mid b, c \in \mathbb{R} \}$. Die Einheitsmatrizen E_{12} und E_{21} bilden also ein Erzeugendensystem von Kern(f), und da sie

linear unabhängig sind, bilden sie auch eine Basis von Kern(f). Diese Basis kann durch E_{11} und E_{22} zur (kanonischen) Basis von $M_{22}(\mathbb{R})$ ergänzt werden, und $f(E_{11})$ und $f(E_{22})$, also $f\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ und $f\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$ bilden dann eine Basis von Bild(f).

Bild(f) ist also ganz $\mathbb{R}^2$; das hätte man auch mit dem Rangsatz zeigen können, oder man konnte einfach nachrechnen, dass f surjektiv ist (und dann irgendeine Basis von $\mathbb{R}^2$ angeben).

SS 16

Aufgabe 2

(a) Die Menge U_1 ist kein Unterraum von $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{Q})$. Es sind nämlich zum Beispiel $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 4\\ 0 & 2\end{pmatrix} \in U_1$, aber

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2 & 4\\ 0 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 5\\ 0 & 3\end{pmatrix} \notin U_1.$$

Mit dem Unterraumkriterium folgt, dass U_1 kein Unterraum sein kann.

(b) U_2 ist ein Unterraum von $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{Q})$, was wir mit dem Unterraumkriterium zeigen werden. Es ist $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \in U_2$. Seien weiter $\begin{pmatrix}a & 0\\ -a & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}b & 0\\ -b & 0\end{pmatrix} \in U_2$ und sei $s \in \mathbb{Q}$. Dann ist

$$\begin{pmatrix}a & 0\\ -a & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}b & 0\\ -b & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+b & 0\\ -(a+b) & 0\end{pmatrix} \in U_2$$

und

$$s\begin{pmatrix}a & 0\\ -a & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}sa & 0\\ -sa & 0\end{pmatrix} \in U_2.$$

Mit dem Unterraumkriterium folgt, dass U_2 ein Unterraum ist.

(c) U_3 ist kein Unterraum von $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{Q})$, denn $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin U_3$.

Aufgabe 3

(a) Wir überführen A in Treppennormalform. Dazu addieren wir das 2-fache der ersten Zeile zur zweiten und die erste Zeile zur dritten. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nun multiplizieren wir die zweite Zeile mit $\frac{1}{3}$. Das ergibt

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zum Schluss wird noch die zweite Zeile von der ersten subtrahiert und das Doppelte der zweiten Zeile von der dritten:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dies ist die Treppennormalform von A. Um die Lösungsmenge von Ax=0 zu ermitteln, streichen wir nun in der Treppennormalform die Nullzeile und füllen dann so mit Nullzeilen auf, dass die Matrix quadratisch ist und die Pivotelemente auf der Diagonalen stehen:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nun ersetzen wir die Nullen auf der Diagonalem durch -1

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und lesen die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ bzw. eine Basis der Lösungsmenge ab:

$$\mathcal{L} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$$

mit Basis $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(b) Die Basis $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$ von $\mathcal{L}$ kann zum Beispiel durch die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$ ergänzt werden. Wir zeigen, dass die 4 Vektoren linear unabhängig sind. Dazu seinen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit

$$a\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$a + c = 0, a = 0, b = 0, -b + d = 0$$

und damit auch $a = b = c = d = 0$. Also sind die 4 Vektoren linear unabhängig und, da 4 linear unabhängige Vektoren in einem 4-dimensionalen Raum eine Basis bilden, auch eine Basis.

Die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$ können durch die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ zu einer Basis ergänzt werden.

(c) Es ist $\mathcal{B} = (\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix})$ und $\mathcal{C} = (\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix})$. Dann ist

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + (-2)\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + (-1)\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Also ist

$$_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & -2 & 1\\0 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $f : V \to V$ linear.

Sei zunächst $\operatorname{Kern}(f) \cap \operatorname{Bild}(f) = \{0\}$ und $v \in \operatorname{Kern}(f \circ f)$. Dann ist $f(f(v)) = 0$, also $f(v) \in \operatorname{Kern}(f)$. Außerdem ist natürlich $f(v) \in$ Bild(f) und damit $f(v) \in \operatorname{Kern}(f) \cap \operatorname{Bild}(f) = \{0\}$. Es folgt $f(v) = 0$, also $v \in \operatorname{Kern}(f)$. Damit ist gezeigt, dass $\operatorname{Kern}(f \circ f) \subseteq \operatorname{Kern}(f)$ gilt. Es gilt aber auch $\operatorname{Kern}(f) \subseteq \operatorname{Kern}(f \circ f)$, denn für $v \in \operatorname{Kern}(f)$ gilt $f(v) = 0$, also auch $f(f(v)) = 0$. Also ist $\operatorname{Kern}(f \circ f) = \operatorname{Kern}(f)$.

Nun nehmen wir an, dass $\operatorname{Kern}(f \circ f) = \operatorname{Kern}(f)$ gilt und müssen $\operatorname{Kern}(f) \cap \operatorname{Bild}(f) = \{0\}$ zeigen. Sei also $v \in \operatorname{Kern}(f) \cap \operatorname{Bild}(f)$. Da $v \in \operatorname{Bild}(f)$, gibt es ein $w \in V$ mit $v = f(w)$. Da $v \in \operatorname{Kern}(f)$, gilt $f(v) = 0$ und damit auch $f(f(w)) = 0$. Also ist $w \in \operatorname{Kern}(f \circ f) = \operatorname{Kern}(f)$. Es folgt $v = f(w) = 0$. Damit ist gezeigt, dass $\operatorname{Kern}(f) \cap \operatorname{Bild}(f) = \{0\}$ gilt.

WS 16/17

Aufgabe 2

Die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$ des linearen Gleichungssystems ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & | & 7 \\ 3 & 7 & 11 & 0 & | & 25 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & | & 14 \end{pmatrix} .$$

Wir subtrahieren von der zweiten Zeile das dreifache der ersten und von der dritten Zeile das doppelte der ersten

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & | & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & | & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} ,$$

addieren die zweite Zeile zur dritten

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & | & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 4 \end{pmatrix}$$

und subtrahieren (um die Null über der zweiten Pivot-Eins zu erhalten) das doppelte der zweiten Zeile von der ersten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 4 \end{pmatrix} .$$

Damit haben wir schon die Treppennormalform erreicht.

Zum Auffüllen auf Dreiecksform fügen wir eine Nullzeile und -1 ein

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 4 \end{pmatrix}$$

und lesen daraus die Lösungsmenge ab:

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\} .$$

Wir können auch die TNF „von unten“ auflösen und erhalten

$$x_4 = 4 \ , \quad x_3 \text{ beliebig} \ , \quad x_2 = 4 - 2x_3 \ , \quad x_1 = -1 + x_3$$

(mit dem gleichen Ergebnis).

Aufgabe 3

Es ist

$$x = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathrm{Kern}(f) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \begin{pmatrix} a+b+c & a-b \\ 2a+c & 2b+c \end{pmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow \ b = a, c = -2a$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \begin{pmatrix} a \\ a \\ -2a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \ (a \in \mathbb{R} \text{ beliebig}) \ ,$$

also $\mathrm{Kern}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ist als einzelner Vektor linear unabhängig, bildet also eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$. Dieser Vektor kann durch zwei beliebige Einheitsvektoren aus $\mathbb{R}^3$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$ ergänzt werden; z.B. sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ linear unabhängig, denn aus $a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ folgt $a+b = 0, a+c = 0, -2a = 0$, also $a = b = c = 0$.

Damit bilden (z.B.) $f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$ und $f(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$, d.h. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$.

SS 17

Aufgabe 2

(a) Wir bestimmen die Treppennormalform von A. Dazu subtrahieren wir das Zweifache der ersten Zeile von der zweiten, und wir subtrahieren die erste Zeile von der dritten. Wir erhalten die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & a-2 \end{pmatrix}.$$

Nun subtrahieren wir die zweite Zeile von der ersten und addieren das Zweifache der zweiten Zeile zur dritten. Es ergibt sich

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Nun müssen wir unterscheiden, ob $a = 0$ oder $a \neq 0$ gilt. Ist $a = 0$, dann ist die obige Matrix bereits in Treppennormalform. Ist $a \neq 0$, dann teilen wir die dritte

Zeile durch a und erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nun wird die dritte Zeile von der ersten und zweiten subtrahiert. Dies ergibt die Einheitsmatrix I_3, die in Treppennormalform ist.

(b) Für $a = 0$ ist die Abbildung f_A nicht bijektiv. Aus der Treppennormalform

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

von A lesen wir mit dem Verfahren zum Lösen von linearen Gleichungssystemen ab, dass der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ in der Lösungmenge des Gleichungssystems $Ax = 0$ liegt. Es gilt also

$$f_A(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = f_A(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}).$$

Damit ist f_A nicht injektiv und darum auch nicht bijektiv.

Aufgabe 3

(a) Wir zeigen mit dem Unterraumkriterium, dass U_f ein Unterraum von $\mathbb{R}^2$ ist. Wegen $f(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_f$. Seien nun $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in U_f$. Dann gilt $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$ und

$$f(\begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) + f(\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+d \\ a+c \end{pmatrix}.$$

Also gilt $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in U_f$. Sei nun noch $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in U_f$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$f(\lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \lambda f(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \lambda \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda b \\ \lambda a \end{pmatrix}.$$

Also gilt auch $\lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in U_f$. Mit dem Unterraumkriterium folgt, dass U_f ein Unterraum von $\mathbb{R}^2$ ist.

(b) Da U_f und $\mathrm{Kern}(f)$ Unterräume von $\mathbb{R}^2$ sind, gilt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_f$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Kern}(f)$, also auch $\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} \subseteq U_f \cap \mathrm{Kern}(f)$.

Sei nun $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in U_f \cap \mathrm{Kern}(f)$. Dann gilt

$$f(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

denn $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathrm{Kern}(f)$, und

$$f(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix},$$

denn $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in U_f$. Es folgt

$$\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

also auch

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

und damit insgesamt $U_f \cap \mathrm{Kern}(f) \subseteq \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$.

Aufgabe 4

Seien $a, b \in \mathbb{K}$, so dass $av + bw = 0$ gilt. Wir wenden f auf diese Gleichung an und erhalten

$$0 = f(0) = f(av + bw) = f(av) + f(bw) = af(v) + bf(w) = a\lambda v + b\mu w = \lambda av + \mu bw.$$

Aus $av + bw = 0$ folgt $bw = -av$. Dies setzen wir in die Gleichung $\lambda av + \mu bw = 0$ ein und bekommen

$$0 = \lambda av + \mu bw = \lambda av + \mu(-av) = (\lambda - \mu)av.$$

Da $v \neq 0$ gilt und aus $\lambda \neq \mu$ auch $\lambda - \mu \neq 0$ folgt, muss $a = 0$ gelten. Aus $a = 0$ folgt dann aber auch sofort $b = 0$, und die beiden Vektoren sind linear unabhängig.

SS 18

Aufgabe 2

(a) Seien $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ aus $\mathbb{R}^4$ und sei $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \\ x_4 + y_4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) \\ (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) + (x_4 + y_4) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2 + x_3 + x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 + y_2 + y_3 \\ y_2 + y_3 + y_4 \end{pmatrix} = f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}) + f(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix})$$

und

$$f(a\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix}ax_1\\ax_2\\ax_3\\ax_4\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}ax_1+ax_2+ax_3\\ax_2+ax_3+ax_4\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}x_1+x_2+x_3\\x_2+x_3+x_4\end{pmatrix} = af(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}).$$

Also ist f linear.

(b) Es gilt $f(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}x_1+x_2+x_3\\x_2+x_3+x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$, also $A = \begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}$.

(c) Es gilt $\mathrm{Kern}(f) = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid f(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid Ax = 0\}$. Es muss also das homogene lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ gelöst werden. Dazu bringen wir A in Treppennormalform. Es muss nur noch die zweite Zeile von der ersten subtrahiert werden. Das ergibt

$$\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&1&1\end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist bereits in Treppennormalform. Wir fügen zwei Nullzeilen und (-1)en auf der Diagonalen hinzu

$$\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&1&1\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

und lesen ab, dass die Vektoren $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$ eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$ bilden.

(d) Mit (c) ist $\mathrm{Kern}(f) \neq \{0\}$. Also ist f nicht injektiv. Mit dem Rangsatz gilt weiter $\dim(\mathbb{R}^4) = 4 = \dim(\mathrm{Kern}(f)) + \dim(\mathrm{Bild}(f)) = 2 + \dim(\mathrm{Bild}(f))$, also folgt $\dim(\mathrm{Bild}(f)) = 2$. Weil auch $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$ gilt, folgt $\mathrm{Bild}(f) = \mathbb{R}^2$, und f ist surjektiv.

(e) Wir müssen die Basiselemente von $\mathcal{B}$ in f einsetzen und die Bilder als Linearkombination der Elemente aus $\mathcal{C}$ schreiben:

$$f(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$f(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=0\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$
$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Nun werden die Koeffizienten in den Zeilen in die Spalten der Matrix geschrieben.

$${}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\1&1&-1&0\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

(a) Da $x_1+x_2, x_2+x_3, x_3+x_1$ Linearkombinationen von x_1, x_2, x_3 sind, folgt sofort $x_1+x_2, x_2+x_3, x_3+x_1 \in \langle x_1, x_2, x_3\rangle$ und damit auch $\langle x_1+x_2, x_2+x_3, x_3+x_1\rangle \subseteq \langle x_1, x_2, x_3\rangle$. Wegen

$$x_1=\frac{1}{2}((x_1+x_2)-(x_2+x_3)+(x_3+x_1))$$
$$x_2=\frac{1}{2}((x_2+x_3)-(x_3+x_1)+(x_1+x_2))$$
$$x_3=\frac{1}{2}((x_3+x_1)-(x_1+x_2)+(x_2+x_3))$$

gilt $x_1, x_2, x_3 \in \langle x_1+x_2, x_2+x_3, x_3+x_1\rangle$ und damit auch $\langle x_1, x_2, x_3\rangle \subseteq \langle x_1+x_2, x_2+x_3, x_3+x_1\rangle$.

(b) Im Allgemeinen gilt nicht $\langle x_1, x_2, x_3\rangle = \langle x_1-x_2, x_2-x_3, x_3-x_1\rangle$. Ist zum Beispiel $x_1 \neq 0$ und $x_1=x_2=x_3$, dann ist $\langle x_1, x_2, x_3\rangle = \langle x_1\rangle \neq \{0\}$ und $\langle x_1-x_2, x_2-x_3, x_3-x_1\rangle = \langle 0,0,0\rangle = \{0\}$.

Aufgabe 4

(a) Ein lineares Gleichungssystem mit unendlich vielen Lösungen ist zum Beispiel $x_1+x_2=0$ über den reellen Zahlen. Die Lösungsmenge ist $\{a\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \mid a\in\mathbb{R}\}$.

(b) Das Intervall $(0,1)$ hat 0 als Häufungspunkt, denn die Folge $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ liegt in $(0,1)$ und konvergiert gegen 0, und $0\notin(0,1)$.

(c) Es gilt

$$\int_a^b e^{-x}dx=[-e^{-x}]_a^b=-e^{-b}+e^{-a}.$$

Ist jetzt zum Beispiel $b=0$, dann muss $e^{-a}=2$ gelten, also $-a=\ln(2)$ oder $a=-\ln(2)$. Es gilt also $\int\limits_{-\ln(2)}^{0} e^{-x}dx=1$.

Aufgabe 2

Die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$ des linearen Gleichungssystems ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & | & 2 \\ 2 & 4 & -1 & m & | & 2 \end{pmatrix} .$$

Wir subtrahieren von der zweiten Zeile die erste und von der dritten Zeile das doppelte der ersten

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & -1 & m-2 & | & 0 \end{pmatrix}$$

und addieren die zweite Zeile zur dritten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & m-1 & | & 1 \end{pmatrix} . \qquad (*)$$

Im Fall $\underline{m = 1}$ haben wir in $(*)$ fast schon die Treppennormalform erreicht; wir müssen zum Aufräumen in der letzten Spalte nur noch die dritte Zeile von der ersten und der zweiten abziehen und erhalten die Treppennormmalform

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} .$$

Es gilt $\mathrm{Rg}(A|b) = 3 \neq \mathrm{Rg}(A) = 2$, das Gleichungssystem ist in diesem Fall also nicht lösbar.

Im Fall $\underline{m \neq 1}$ dividieren wir die letzte Zeile von $(*)$ durch $m-1$, subtrahieren sie anschließend von der ersten und von der zweiten Zeile und erhalten die Treppennormalform

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & | & 1-\frac{1}{m-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 1-\frac{1}{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{m-1} \end{pmatrix} .$$

Es gilt $\mathrm{Rg}(A|b) = \mathrm{Rg}(A) = 3$, das Gleichungssystem ist also lösbar; zum Auffüllen auf Dreiecksform fügen wir eine Nullzeile und dann auf der Diagonalen -1 ein

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & | & \frac{m-2}{m-1} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & \frac{m-2}{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{m-1} \end{pmatrix}$$

und lesen daraus die Lösungsmenge ab:

$$\mathcal{L}_{m\neq 1} = \left\{ \frac{1}{m-1} \begin{pmatrix} m-2 \\ 0 \\ m-2 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\} .$$

Aufgabe 3

Es ist

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Kern}(f) \quad \Leftrightarrow \quad f(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 + x_2 \\ x_4 - x_3 \\ x_3 - x_4 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; x_2 = -x_1, x_3 = x_4$$

$$\Leftrightarrow \quad v = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (x_1, x_3 \in \mathbb{R} \text{ beliebig}) ,$$

also $\mathrm{Kern}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Die beiden Vektoren sind linear unabhängig, denn es gilt

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = x_3 = 0 ,$$

sie bilden also eine Basis von Kern(f). Diese Vektoren können z.B. durch

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} , \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$ ergänzt werden; es ist

$$a\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+c\\-a\\b+d\\b\end{pmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow\ a=b=c=d=0\ ,$$

also sind die Vektoren linear unabhängig. Damit bilden

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \text{ und } f\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

eine Basis von Bild(f) (was man aber auch direkt hätte zeigen können).

Es ist dim(Kern(f))+dim(Bild(f))=2+2=4=dim($\mathbb{R}^4$), wie es der Rangsatz aussagt.

Aufgabe 4

a) Das wohl einfachste Beispiel ist $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=0$ für alle $x\in\mathbb{R}$, also Kern(f)=$\mathbb{R}$ und dim(Kern(f))=1.

b) Das halboffene Intervall $(0,1]$ hat 1 als Maximum; 0 ist Infimum, aber kein Minimum, da es nicht im Intervall liegt.

c) Die harmonische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent, obwohl $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n}{n+1} < 1$ für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt.

d) Für die Betragsfunktion gilt das Gewünschte (stetig, aber nicht differenzierbar) in $x_0=0$; die verschobene Betragsfunktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=|x-1|$ hat dann die gleichen Eigenschaften in $x_0=1$: Sie ist als Komposition stetiger Funktionen auf ganz $\mathbb{R}$ stetig, aber für den Differenzenquotienten in $x_0=1$ gilt mit den beiden Nullfolgen $a_n=1/n$ bzw. $b_n=-1/n$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(1+a_n)-f(1)}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{a_n} = 1$, aber $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(1+b_n)-f(1)}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{|b_n|}{b_n} = -1$.

(„ ... hat den Knick in $x_0=1$“ reicht als Begründung aber auch aus.)

SS 19

Aufgabe 2

Die erweiterte Koeffizientenmatrix zum Gleichungssystem ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -1 & | & 0 \\ -1 & -2 & -2 & -1 & -1 & | & -1 \\ 1 & 2 & 6 & 4 & 2 & | & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Um diese in Treppennormalform zu überführen, addieren wir die erste Zeile zur zweiten und subtrahieren die erste Zeile von der dritten.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -2 & | & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 4 & 3 & | & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Nun vertauschen wir die zweite und die vierte Zeile.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

Jetzt addieren wir die zweite Zeile zur ersten, subtrahieren das Siebenfache der zweiten Zeile von der dritten und addieren das Dreifache der zweiten Zeile zur vierten.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Wir vertauschen die dritte und vierte Zeile.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 & 5 \end{array}\right)$$

Zum Schluss multiplizieren wir die dritte Zeile mit (-1) und subtrahieren anschließend das Vierfache der dritten Zeile von der vierten.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Die Matrix ist jetzt in Treppennormalform. Wir lesen ab, dass der Rang der Koeffizientenmatrix 3 ist, während der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix 4 ist. Das Gleichungssystem ist also nicht lösbar, die Lösungsmenge ist die leere Menge $\emptyset$.

Aufgabe 3

1. (a) Die Abbildung $f : \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ mit $f(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = ad + bc$ ist nicht linear. Es ist zum Beispiel $f(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = 1$, aber

$$f(2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}) = 4 \neq 2f(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}).$$

   (b) Die Abbildung $g : \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ mit $g(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = a - 2(b + c) - d$ ist linear.

Seien $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$. Dann ist

$$\begin{aligned} g(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}) &= g(\begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix}) \\ &= a_1 + a_2 - 2(b_1 + b_2 + c_1 + c_2) - (d_1 + d_2) \\ &= (a_1 - 2(b_1 + c_1) - d_1) + (a_2 - 2(b_2 + c_2) - d_2) \\ &= g(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}) + g(\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}). \end{aligned}$$

Außerdem gilt für $r \in \mathbb{R}$ und $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$

$$g(r\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = g(\begin{pmatrix} ra & rb \\ rc & rd \end{pmatrix}) = ra - 2(rb + rc) - rd = r(a - 2(b + c) - d) = rg(\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

Damit ist g linear.

a) Die Vektoren der Menge M_1 sind linear unabhängig. Um das zu zeigen seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2b \\ -b \\ a - c \\ 3b + 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es folgt $a + 2b = 0, -b = 0, a - c = 0$ und $3b + 2c = 0$. Aus der zweiten Gleichung folgt sofort $b = 0$ und damit aus der ersten Gleichung $a = 0$ und aus der vierten Gleichung $c = 0$. Also sind die Vektoren linear unabhängig.

b) Die Vektoren aus der Menge M_2 sind linear abhängig. Um das zu zeigen, benötigt man eine Linearkombination der Vektoren, die den Nullvektor ergibt und in der nicht alle Koeffizienten gleich 0 sind. Entweder findet man diese Linearkombination durch Ausprobieren oder rechnet sie aus. Dazu seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2b \\ -b + c \\ a - b + 3c \\ 5b - 5c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es folgt $a + 2b = 0, -b + c = 0, a - b + 3c = 0$ und $5b - 5c = 0$. Hier ergibt sich ein lineares Gleichungssystem, das man mit den im Kurs gelernten Methoden lösen kann. Man sieht aber auch so ziemlich schnell, dass aus der zweiten und vierten Gleichung $b = c$ folgt. Das in die dritte Gleichung eingesetzt ergibt $a + 2b = 0$, also genau die erste Gleichung. Eine Lösung dieser Gleichung wäre $a = 2$ und $b = -1$. Mit $b = c$ folgt dan auch $c = -1$. Und tatsächlich ist

$$2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit sind die Vektoren linear abhängig.

Aufgabe 4

Wir bestimmen ein Erzeugendensystem von Bild(f), indem wir die kanonische Basis von $\mathbb{Q}^4$ in f einsetzen. Es gilt

$$f(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, f(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, f(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, f(\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},$$

also $\mathrm{Bild}(f) = \langle \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \rangle$. Diese drei Vektoren sind linear unabhängig, denn aus $a\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c\\b\\a+b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ für $a, b, c \in \mathbb{Q}$ folgt $c = 0, b = 0, a + b = 0$ und damit sofort $a = b = c = 0$. Da diese drei Vektoren linear unabhängig sind, folgt $\mathrm{Bild}(f) = \mathbb{Q}^3$ und $\mathrm{Rg}(f) = 3$.